Übung 1, GK 12 m2. Name______________ Datum__________

Übung 1

Gegeben sind die Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Gerden g und h.
Lösung: windschief, da kein Schnittpunkt und nicht parallel

b) Berechnen Sie den Winkel zwischen g und h.
Lösung: $\textit{Winkel}(g, h) = 90°$, da das Skalarprodukt der Richtungsvektoren gleich Null ist.

Übung 2

Gegeben ist die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie eine Gerade h, die orthogonal zu g liegt.
Lösung: Ansatz: Der Richtungsvektor von h, $\vec{v_h} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ muss senkrecht zu $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ stehen. Also $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$ muss gelten. Das gilt nur wenn $x_1 = x_2$ gilt. Daher ist $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$, mit $x \neq 0$, der gesuchte Richtungsvektor. Damit ist $h : \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ und $x \in \mathbb{R}^{\neq 0}$ beliebig und auch der Aufvektor $\vec{a}$ ist beliebig.

b) Bestimmen Sie eine Gerade k, die parallel zu g liegt, aber nicht identisch mit g ist.
Lösung: Ansatz: Der Richtungsvektor von k, $\vec{v_k} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ muss parallel zu $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ stehen. Also $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ muss gelten. Das gilt nur wenn $x_1 = -x_2$ gilt. Daher ist $\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$, mit $x \neq 0$, der gesuchte Richtungsvektor. Damit ist $k : \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$ und $x \in \mathbb{R}^{\neq 0}$ beliebig und auch der Aufvektor $\vec{a}$ ist beliebig, aber kein Ortsvektor eines Punktes aus g, da sonst $g = k$ gilt.

Übung 3

Betrachten Sie das Dreieck Δ_{ABC} gegeben durch die Punkte $A := P(1|-1|5)$, $B := P(5|7|6)$ und $C := P(6|2|8)$.

a) Wie muss eine Gerade g verlaufen, damit sie senkrecht zum Dreieck Δ_{ABC} verläuft?
Lösung: Ein Dreieck liegt in einer Ebene. D.h. wennn die Gerade senkrecht zu zwei Seiten verläuft, dann ist sie auch senkrecht zur dritten Seite. D.h. man kann das Vektorprodukt z.B. $\vec{AB} \times \vec{AC}$ als Richtungsvektor der gesuchten Gerade verwenden. D.h. $\vec{v_g} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 5 - 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 3 - 8 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -7 \\ -28 \end{pmatrix}$.
Teste ob $\vec{v_g} \perp \vec{[BC}$: $\begin{pmatrix} 21 \\ -7 \\ -28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$. Also liegt jede Gerade mit Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 21 \\ -7 \\ -28 \end{pmatrix}$ senkrecht zu allen Dreiecksseiten.

b) Gibt es eine Gerade, die parallel zu allen Seiten des Dreiecks Δ_{ABC} verläuft.
Lösung : Nein, da die Seiten des Dreiecks nicht parallel sind.